N.P. Dmitriev
Nizhnevartovsk, Russia

EVALUATING THE NORM OF THE COMPLEX-VALUED FUNCTION DERIVATIVE WITH THE CONVEX DOMAIN OF VARIATION OF THE SECOND ORDER DERIVATIVE

Abstract. Many results related to the so-called comparison theorems and inequalities for derivatives in different classes of differentiable functions have been obtained in the theory of approximation of functions. In what follows we consider the class of differentiable functions with an absolutely continuous derivative on any straight-line segment and essentially restricted by a derivative of higher order. Our work [1] presented the evaluation of the actual performance of differentiable functions with asymmetrical restrictions on the second derivative. In paper [2] we provided the results extended to the class of complex-valued differentiable functions with asymmetric restrictions on the second derivative. We considered a case when the domain of variation of the second-order derivative was an ellipse with one of the focuses at the origin of coordinates. It is worth noting that the problem of evaluating the performance of real or complex-valued functions is related to the problem of estimating the norms of derivatives of such functions. It turned out that in this case the norm of the derivative restricted in the norm of complex-valued functions can be evaluated using Bernoulli splines applied in [5], or Euler splines [3]. Here we have received a bilateral evaluation of the derivative norm of a complex-valued differentiable function with asymmetric restrictions on the second-order derivative, namely, we have considered a case when the domain of variation of second-order derivative is a convex set of a complex plane. If we fit a certain ellipse with one of the focuses at the origin of coordinates in this set and describe another ellipse around this set, it is possible to obtain a two-sided evaluation of the norm of the restricted complex-valued function derivative. This raises a problem of finding ellipses that best encompass the boundary of the given convex set. To get the best inscribed ellipse we can use the maximization of the major semiaxis and the minimization of the distance from the origin of coordinates to the focus as a criterion. To get the best circumscribed ellipse we can use the minimization of the major semiaxis and the maximization of the distance from the origin of coordinates to the focus as a criterion. This problem solved, we will be able to minimize the difference between the upper and lower estimate of the derivative norm. Here we have obtained a bilateral evaluation of the derivative norm of the restricted complex-valued function under the assumption that inscribed and circumscribed ellipses that best encompass the boundary of the area were built as regard to a restricted convex domain of variation of the second-order derivative. Thus, bilateral evaluation of the derivative norm of restricted complex-valued functions with a convex domain of variation of the second-order derivative is expressed through the norm of the function and size of the ellipses covering the boundary of a convex domain.

Key words: the Euler splines; comparison theorems; evaluation of derivative norms.

About the author: Nikolai Pimenovich Dmitriev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Education in Mathematics and Physics.

Place of employment: Nizhnevartovsk State University.

УДК 511:519.688

Т.Б. Казиахмедов
Нижневартовск, Россия

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПРИ ДИАГНОСТИКЕ СИСТЕМ

Аннотация. Использование фрактального анализа необходимо при решении задач диагностики систем, связанных с изменениями параметров в течение времени, т.е. на временных рядах. Сегодня нет ни одной отрасли экономики, где не используется алгоритмы, основанные на теории фрактального анализа. Данной теории долгое время не придавалось соответствующего значения. Конфликт между симметрией евклидовой геометрии и асимметрией реального мира может быть продлен до нашего понятия времени. Традиционно события рассматриваются либо как случайные, либо как детерминированные. Во фрактальном времени случайность и детерминизм, хаос и порядок сосуществуют. Это подходит и для естественных систем, которые характеризуются локальной случайностью и глобальным детерминизмом. Нами были исследованы как линейные, так и нелинейные фракталы, было проанализировано использование фрактального анализа в задачах оценки состояния рынков, нефтяных предприятий, а также в сложных задачах оценки состояния систем в целом.

Разработанная программа «Фрактальные множества» в первую очередь демонстрирует красоту фрактальных узоров, свойство «самоподобия» фракталов и позволяет получить фрактальные множества Жюлиа и Мандельброта разных степеней. Данная программа также позволяет исследовать поведение фрактальных узоров при изменении комплексной константы С. Причем мы можем получить комплексные координаты точек этих множеств.

Очень важно отметить, что использование фрактального анализа становится интереснее и практичнее при использовании таких пакетов как MatLab и SkiLab(Сайлаб), которые и содержат в себе соответствующие модули фрактального анализа. Программные модули по использованию фрактального анализа нами были разработаны с использованием указанных пакетов символьной математики. Также были разработаны программные модули для построения различных фракталов и фрактальных диаграмм поведения систем. Решение таких задач с использованием данных пакетов является актуальным практически по всем направлениям подготовки бакалавров и магистров.

Программа «Фрактальные множества» реализована на языке С++. На программу получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Ключевые слова: фрактал; фрактальная геометрия; фрактальный анализ; временные ряды.

Сведения об авторах: Казиахмедов Туфик Багаутдинович, доцент кафедры информатики и МПИ.

Место работы: Нижневартовский государственный университет.

Контактная информация: г. Нижневартовск, ул. Дзержинского, д. 11, каб. 207а. E-mail: ktofik@yandex.ru.

Введение во фрактальные временные ряды

Математическая культура долгое время была одержима гладким и симметричным. Фрактальная геометрия в отличие от евклидовой основывается на грубости и асимметрии. «Самоподобие» является определяющим свойством фракталов. Большинство естественных структур, особенно живые существа, обладают этим свойством. Вторая проблема, возникающая при применении евклидовой геометрии к нашему миру, – это проблема размерности. Восприятие размерности может изменяться в зависимости от нашего расстояния от объекта. Мы увидим разницу между гладкостью евклидового мира и грубостью нашего мира, что ограничивает пригодность евклидовой геометрии как метода описания [2].

Противоречия между симметрией евклидовой геометрии и асимметрией реального мира могут быть далее продлены до нашего понятия времени. Так в науке сложилось, что события рассматриваются либо как случайные, либо как детерминированные. Во фрактальном времени случайность и детерминизм, хаос и порядок сосуществуют.

Время не имело значения в механике Ньютона. Теоретически время могло быть повернуто в обратную сторону, потому что уравнения Ньютона работали одинаково хорошо независимо от того, шло ли время вперед или назад. В то же время такой процесс, как смешение жидкостей зависит от времени и необратим. В термодинамике стрелка времени указывает только в будущее.

Появление квантовой механики подорвало детерминистическое представление о вселенной. Но все еще оставалось сомнение: вселенная детерминирована или случайна? Постепенно стало очевидным, что самые естественные системы характеризуются локальной случайностью и глобальным детерминизмом. Эти противоположные состояния должны сосуществовать. Детерминизм даст нам закон природы, в котором случайность привносит новшество и разнообразие. Здоровая, развивающаяся система – это та, которая не только может пережить случайные удары, но также может поглотить такие удары, чтобы улучшить всю систему, когда это станет целесообразным.

В науке хаоса и фракталов случайность и необходимость сосуществуют. В этих системах энтропия высока, но никогда не достигает максимального состояния беспорядка из-за глобального детерминизма. Хаотические системы экспортируют свою энтропию или «рассеивают» ее, аналогично тому, как механические устройства рассеивают часть своей энергии как трение.

Игра хаоса показывает, что локальная случайность и глобальный детерминизм могут сосуществовать, чтобы создать стабильную, самоподобную структуру, которую и называют фракталом.

Бенуа Мандельброт, отец фрактальной геометрии, не сформулировал точного определения фрактала. Приведем фрактальные множества Б. Мандельброта и Г. Жюлиа, полученные из разработанной нами программы.

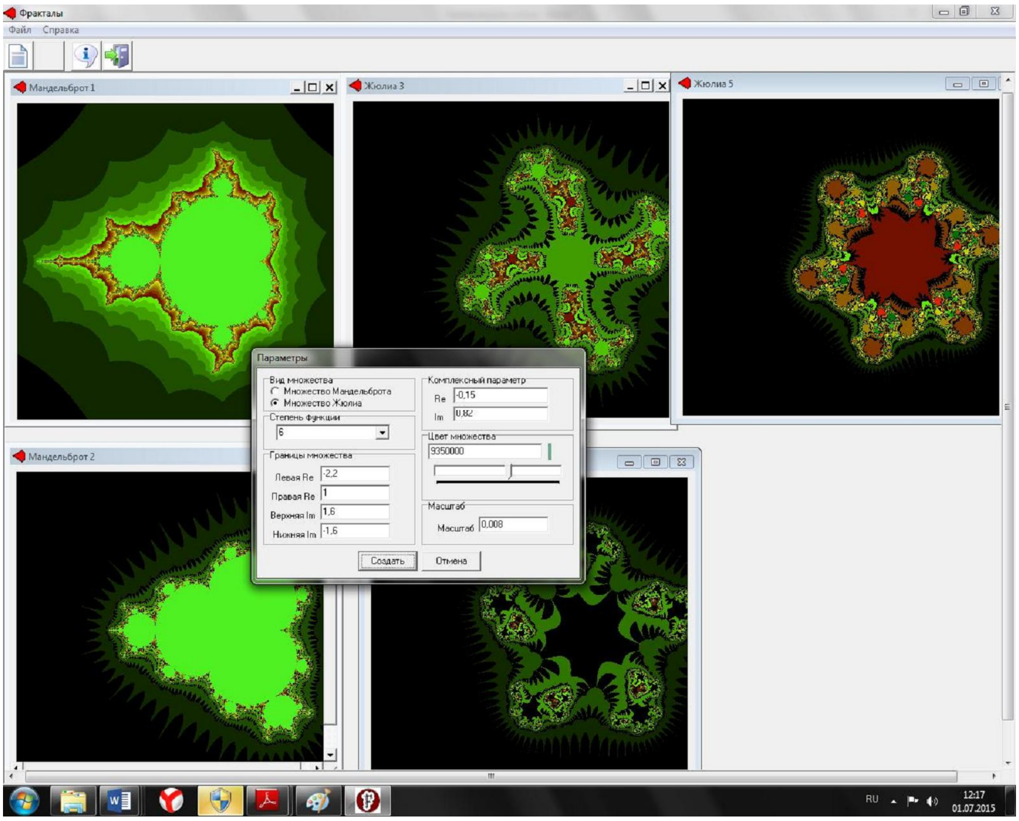

Рис. 1. Фракталы

Фракталы имеют определенные особенности, которые измеримы, и свойства, которые являются желательными для целей моделирования. Первое свойство – самоподобие. Оно означает, что части в некотором роде связаны с целым. Это свойство самоподобия делает фрактал масштабно-инвариантным. Фрактальные зависимости имеют вид прямой на графиках, где обе оси имеют логарифмический масштаб. Модели, описываемые таким образом, должны использовать степенную зависимость (вещественное число, возведенное в степень). Эта особенность масштабирования по степенному закону является вторым свойством фракталов, фрактальной размерностью, которая может описывать либо физическую структуру, либо временной ряд.

$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(\frac{1}{\delta})}. \quad (1)$$

Фрактальная размерность D характеризует то, как предмет заполняет пространство. Фрактальная размерность временного ряда измеряет, насколько изрезанным является временной ряд.

Фрактальная размерность временного ряда важна, потому что она признает, что процесс может быть где-то между детерминистическим (линия с фрактальной размерностью 1) и случайным (фрактальная размерность 1,5). Фактически, фрактальная размерность линии может находиться в пределах от 1 до 2. При значениях 1,5 < *ш* < 2 временной ряд более зазубрен, чем случайная последовательность, или имеет больше инверсий. Само собой разумеется, статистика временного ряда с фрактальными размерностями, отличными от 1,5, сильно отличалась бы от гауссовой статистики и не обязательно находилась бы в пределах нормального распределения.

Существуют несколько подходов к определению фрактальной размерности:

1) клеточная размерность;
2) поточечная размерность;
3) корреляционная размерность;
4) информационная размерность.

Клеточная размерность. Используется при исследовании размерности линий и площадей с фрактальной природой.

Ее суть заключается в том, что линия или площадь накрывается сеткой с размером ячейки δ. Затем подсчитывается количество клеток $N(\delta)$, накрывающих исследуемую линию (или площадь). Далее величина δ несколько раз уменьшается, и для каждого нового значения δ определяется соответствующее количество клеток $N(\delta)$. На рисунке 2 приведена иллюстрация этого процесса.

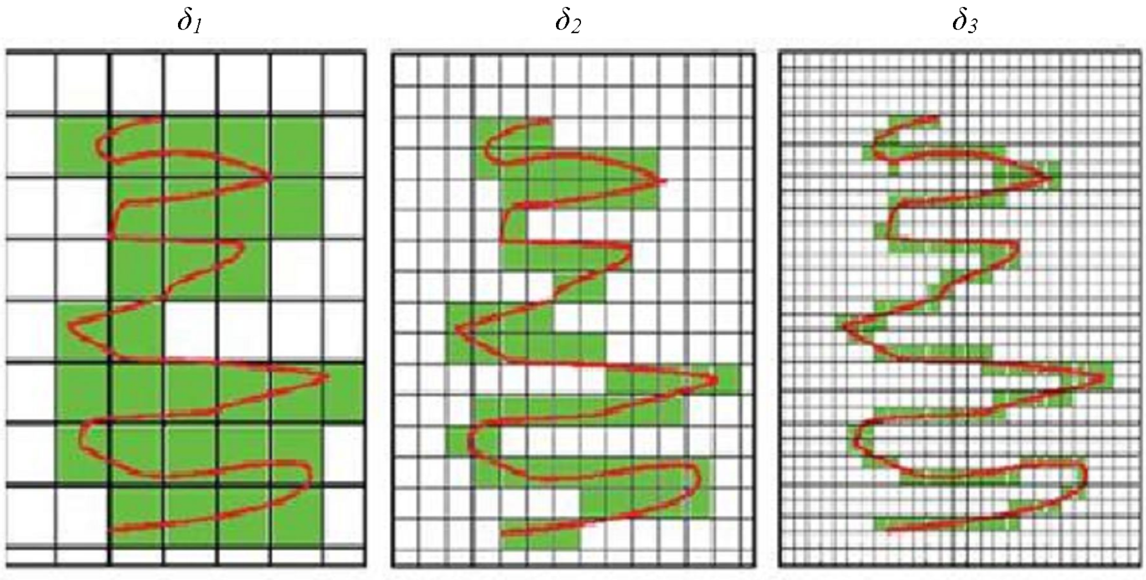

Рис. 2. Покрытие кривой линии клетками с различными размерами δ

В результате этого получаем несколько пар значений $(N(\delta), \delta)$, для которых вычисляем логарифмы.

Теперь построим систему координат в двойном логарифмическом масштабе $lg\,N(\delta)\ lg\,\delta$ и нанесем точки с координатами $[lg\,N(\delta),\ lg\,\delta]$ на плоскости. Проведем прямую линию через эти точки, как показано на рисунке 3.

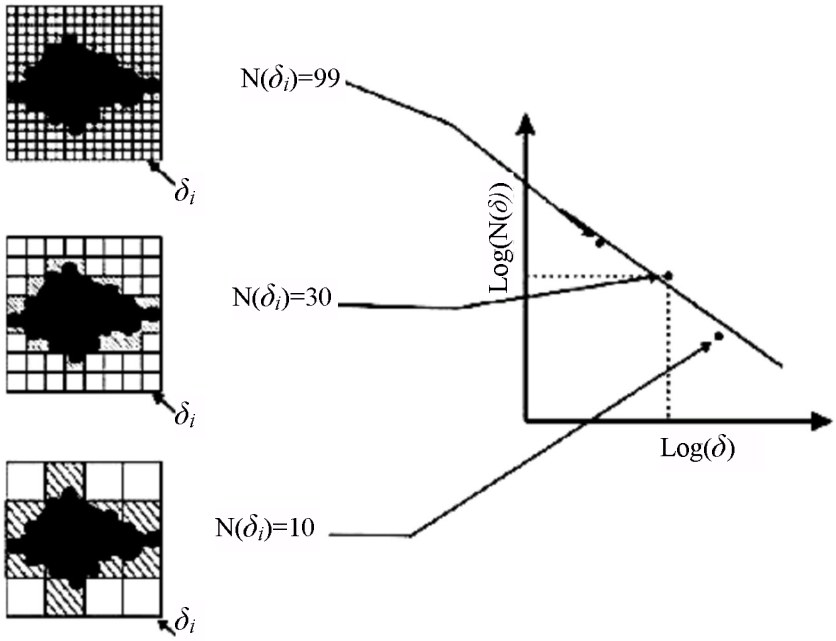

Рис. 3. Построение системы координат с двойным логарифмитеским масштабом

Далее определим угол наклона этой линии α, как показано на рисунке 4. Клеточная фрактальная размерность D представляется выражением: $D = \mathrm{tg}\,\alpha$.

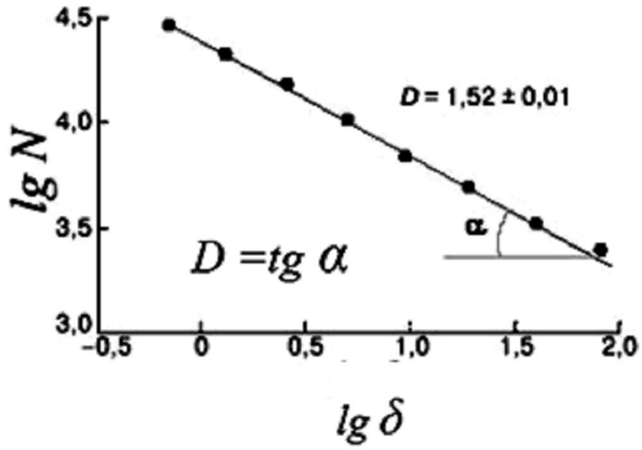

Рис. 4. Определение клеточной фрактальной размерности по наклону прямой линии

Поточечная (фрактальная) размерность. Рассмотрим какую-нибудь траекторию в фазовом пространстве на протяжении длительного времени (рис. 5).

Проведем выборку точек на траектории (достаточно большое число No) произвольным образом. Опишем вокруг какой-нибудь точки $x0$ на траектории сферу диаметра δ (или куб с ребром δ) и подсчитаем число выборочных точек, попавших внутрь сферы.

Вероятность того, что выборочная точка окажется внутри сферы, определяется выражением:

$$P(\delta) = \frac{N(\delta)}{No}. \quad (2)$$

где No – общее число точек на траектории.

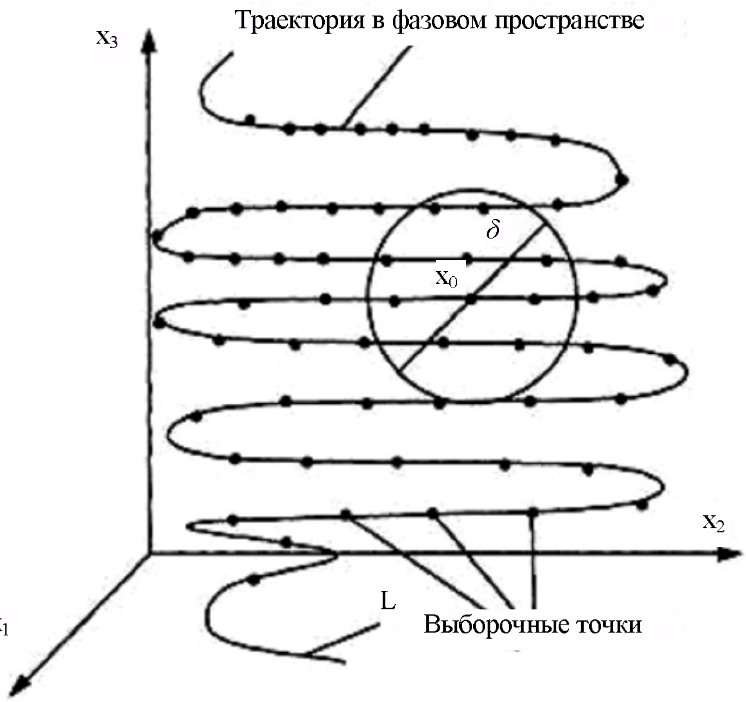

Рис. 5. Геометрические построения для нахождения поточной (фрактальной) размерности

Размерность траектории для некоторой области точек $X^{(i)}$ фазового пространства имеет вид:

$$d_{fp} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln P(\delta, x^{(i)})}{\ln(\delta)}. \qquad (3)$$

После небольших преобразований формулу (3) можно привести к формуле (1).

Корреляционная (фрактальная) размерность широко используется для определения меры упорядоченности движений и является нижней оценкой хаусдорфовой размерности странного аттрактора.

Фрактальный анализ способствовал появлению новых научных дисциплин и подходов оценки функционирования различных систем. Теория хаоса и фрактальная статистика предлагают нам новый способ понимания того, как функционируют рынки и экономики. Нет гарантий того, что нам будет легче зарабатывать деньги, но, тем не менее, мы будем более приспособлены к разработке стратегий и оценке рисков.

Нестационарные временные ряды можно разделить по типу нестационарности на три достаточно общих класса[1; 3; 4]:

- ряды, нестационарные в малом, когда сохраняется закон распределения или его основные параметры, а меняется математическое ожидание или дисперсия;
- ряды, нестационарные в большом, когда меняется, например, закон распределения;
- существенно нестационарные ряды, когда не только меняется закон распределения случайной величины, но и не существует аналитического представления тренда временного ряда, т.е. его невозможно выделить в виде функциональной зависимости. К этому классу временных рядов относятся многие экономические времен-

ные ряды, для которых характерна схема частичного управления и частая смена определяющего случайный процесс комплекса условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметханов Р.С. Применение теории фракталов в исследовании динамических свойств механических систем // Проблемы машиностроения и автоматизация. – 2003. – № 3. – С. 47–53.
2. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М., 2000.
3. Полякова М.В., Любченко В.В. Структурный анализ временных рядов со скачками среднего значения // Оптимизация управления, информационные системы и компьютерные технологии: Труды Украинской академии экономической кибернетики (Южный научный центр). Киев; Одесса, 1999. – Вып. 1. –Ч. 1. – С. 174–179.
4. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. – М., 2005.

REFERENCES

1. Akhmethanov, R.S. Primeneniye teorii fraktalov v issledovanii dinamicheskikh svojstv mekhanicheskikh sistem [Applying fractal theory in the study of dynamic properties of mechanical systems] // Problemy mashinostroyeniya i avtomatizatsii. 2003. №. 3. P. 47–53. (In Russian).
2. Crownover, R.M. Fraktaly i khaos v dinamicheskikh sistemakh [Fractals and chaos in dynamical systems]. Moscow, 2000. (In Russian).
3. Polyakova, M.V., Lyubchenko, V.V. Strukturny analis vremennykh ryadov so skachkami srednego znacheniya [Structural analysis of time series with average jumps] // Optimizatsiya upravleniya, informatsionniye sistemy i komputerniye tekhnologii: Trudy Ukrainskoy ekonomicheskoy kibernetiki (Yuzhny nauchny tsentr). Kiev; Odessa, 1999. Vol. 1. Part 1. P. 174–179. (In Russian).
4. Potapov, A.A. Fraktaly v radiofizike i radiolokatsii: Topologiya vyborki [Fractals in radiophysics and radiolocation: Sampling topology]. Moscow, 2005. (In Russian).

T.B. Kaziakhmedov
Nizhnevartovsk, Russia

FRACTAL ANALYSIS AND PROBLEM-SOLVING TO IDENTIFY THE CHARACTERISTICS OF TIME SERIES IN SYSTEM DIAGNOSIS

Abstract. Fractal analysis is required when solving the problems of system diagnostics associated with time-series parameter changes. There is no economy sector that does not use algorithms based on the fractal analysis theory. However, this theory has long been given little attention and value. The conflict between the symmetry of Euclidean geometry and asymmetry of the real world can be further extended to our modern concept of time. Traditionally, all the events are treated as either random or deterministic. In fractal time, randomness and determinism, chaos and order are coexistent. This is also true for natural systems characterized by local randomness and global determinism. We have studied both linear and nonlinear fractals and analyzed the use of fractal analysis in such tasks as market assessment, assessment of oil companies, and complex system assessment tasks.

Our program of Fractal Sets demonstrates the beauty of fractal patterns and the fractals' property of self-similarity and enables obtaining Julia and Mandelbrot sets of different degrees. The program also allows us to study the behavior of fractal patterns in case of complex C constant changes and obtain complex point data of these sets.

It is worth noting that the application of fractal analysis is more interesting and practical when using MatLab and SkiLab(Silab) packages with appropriate fractal analysis modules. We have developed software fractal analysis modules using character-coded mathematic packages indicated above. Moreover, we have developed software modules for building various types of fractals and fractal diagrams. Such solutions are topical in almost all relevant bachelor and master programs.

The program of Fractal Sets used C++ programming language and received a Software Application State Registration Certificate.

Keywords: fractal; fractal geometry; fractal analysis; time series.

About the author: Tufik Bagautdinovich Kaziakhmedov, Associate Professor at the Department of Computer Science and Methods of Teaching Computer Science.

Place of employment: Nizhnevartovsk State University.